数理解析研究所講究録
60巻 1968年 77-84

固有根の分布について(複素数の場合)

統数研　早川　毅

§1 序

複素数正規分布をもとにする統計的な議論は N. R. Goodman [2] により時系列解析における多入力問題を取扱う為に始められ，その後 C. G. Khatri [5], [6], A. T. James [4] 等により多変数正規分布論に表れる各種の統計量が複素数変量に拡張した時に，ほぼ平行的に論ぜられることを示した．ここでは複素変数の一般化された Hermite, Laguerre 多項式を定義して，それらの性質を論ずる．またこれらの多項式を用いて，複素数 non-central Wishart 分布の固有根の分布，また固有根に関する統計量の分布について議論する．

§2. 複素数Hermite多項式

早川[3]に於て，実変数の一般化された Hermite 多項式を定義し，その性質を論じている．ここでは複素数の場合に拡張す

る。その為に次の記号，等式を用いる。

(1) $$\tilde{\Gamma}_m(a) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=1}^{m} \Gamma(a-i+1)$$

(2) $$\tilde{\Gamma}_m(a;\kappa) = \pi^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{i=1}^{m} \Gamma(a+k_i-i+1)$$

(3) $$[a]_\kappa = \tilde{\Gamma}_m(a;\kappa)/\tilde{\Gamma}_m(a) = \prod_{i=1}^{m} (a-i+1)_{k_i}$$

ここで $\kappa=(k_1,\ldots,k_m)$ は k の分割である。

(4) $$ {}_p\tilde{F}_q^{(m)}(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;A,B) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{[a_1]_\kappa\cdots[a_p]_\kappa}{[b_1]_\kappa\cdots[b_q]_\kappa} \frac{\tilde{C}_\kappa(A)\tilde{C}_\kappa(B)}{k!\,\tilde{C}_\kappa(I_m)}$$

$\tilde{C}_\kappa(A)$ は分割 κ に対応する Hermite 行列 A の Zonal 多項式である。

(5) $$\int_{U(m)} \tilde{C}_\kappa(AUB\bar{U}')\,d(U) = \frac{\tilde{C}_\kappa(A)\tilde{C}_\kappa(B)}{\tilde{C}_\kappa(I_m)},$$

(6) $$\int_{U(m)} \mathrm{etr}(XU+\bar{U}'\bar{X}')\,d(U) = {}_0\tilde{F}_1(n;X\bar{X}')$$

(7) $$\int_{\bar{R}'=R>0} \mathrm{etr}(-R)(\det R)^{\alpha-m}\tilde{C}_\kappa(BR)\,dR = \tilde{\Gamma}_m(\alpha;\kappa)\tilde{C}_\kappa(B)$$

$d(U)$ は Noimalized Unitary Invariant measure であり，A，B は $m\times m$ Hermite 多項式，$X_{n\times n}$ 任意行列とする。

一般化された複素数のHermite多項式を次の様に定義する。

(9) $$\operatorname{etr}(-T\bar{T}')\tilde{H}_\kappa(T) = \frac{(-1)^k}{\pi^{mn}}\int_W \operatorname{etr}[-i(T\bar{W}'+W\bar{T}')]\operatorname{etr}(-W\bar{W}')\tilde{C}_\kappa(W\bar{W}')dW$$

T, W は $m\times n$ の任意行列である. また一般化された複素数のLaguerre多項式は, $\gamma>-1$ に対して,

(10) $$\operatorname{etr}(-S)\tilde{L}^\gamma_\kappa(S) = \int_{\bar{R}'=R>0} \tilde{A}_\gamma(RS)(\det R)^\gamma \operatorname{etr}(-R)\tilde{C}_\kappa(R)dR$$

で定義される. ここで, S はHermite行列であり, $\tilde{\Gamma}_m(\gamma+m)\cdot\tilde{A}_\gamma(RS) = {}_0\tilde{F}_1(\gamma+m;-RS)$ である。

[定理1]

(11) $$\tilde{H}_\kappa(T) = (-1)^k\tilde{L}^{n-m}_\kappa(T\bar{T}').$$

(系1)

(12) $$\tilde{H}_\kappa(U_1T) = \tilde{H}_\kappa(TU_2) = \tilde{H}_\kappa(T)$$

ここで $U_1\in U(m)$, $U_2\in U(n)$ とする.

(系2)

(13) $$\tilde{H}_\kappa(0) = (-1)^k[n]_\kappa\tilde{C}_\kappa(I_m)$$

(系3)

(14) $$|\tilde{H}_\kappa(T)| \leq \mathrm{etr}(T\bar{T}')[n]_\kappa \tilde{C}_\kappa(I_m).$$

[定理2] (Hermite 多項式の生成母函数)

S, T を m×n の任意行列とする.

(15) $$\int_{U(m)}\int_{U(n)} \mathrm{etr}(-S\bar{S}' + U_1 T U_2 \bar{S}' + S\bar{U}_2'\bar{T}'\bar{U}_1')\, d(U_1)\, d(U_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{\tilde{H}_\kappa(T)\tilde{C}_\kappa(S\bar{S}')}{k!\,[n]_\kappa \tilde{C}_\kappa(I_m)},$$

$U_1 \in U(m)$, $U_2 \in U(n)$ とする。

[定理3] (Laguerre 多項式の生成母函数)

S, Z m×m 正値 Hermite 行列 ($\|Z\|<1$)

(16) $$\det(I-Z)^{-\gamma-m}\int_{U(m)} \mathrm{etr}(-SUZ(I-Z)^{-1}\bar{U}')\, d(U) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa} \frac{\tilde{L}^{\gamma}_\kappa(S)\tilde{C}_\kappa(Z)}{k!\,\tilde{C}_\kappa(I_m)}.$$

(系4).

(17) $$\sum_{\kappa} \tilde{H}_\kappa(T) = (-1)^k \mathrm{etr}(T\bar{T}')\frac{\Gamma(mn+k)}{\Gamma(mn)}\, {}_1F_1(mn+k; mn; -\mathrm{Tr}\, T\bar{T}')$$

(18) $$\sum_{\kappa} [n]_\kappa \tilde{C}_\kappa(I_m) = [mn]_k$$

(系5)

$$(19) \qquad \operatorname{etr}(T\bar{T}') = 2^{mn}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{\tilde{H}_\kappa(\sqrt{2}T)}{k!}$$

$$(20) \qquad \operatorname{etr}(-I_m)\,{}_0\tilde{F}_1(n;T\bar{T}') = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{\tilde{H}_\kappa(T)}{k!\,[n]_\kappa}.$$

§3. Jacobian と積分

[定理4]

S : $m\times m$ 正値 Hermite 行列 に対して,

$$S = U_1\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & V\end{bmatrix}\bar{U}'$$

と分解する。U は $m\times m$ Unitary 行列とし, $2(m-1)$ コの独立変数 $u_{21}^R, u_{21}^I, \cdots; u_{m1}^R, u_{m1}^I$ を持つ。V は $(m-1)\times(m-1)$ 行列で, $\lambda_1 I_{m-1} > V = \bar{V}' > 0$ である. このとき,

$$(21) \qquad J(S\to\lambda_1, U, V) = \det(\lambda_1 I_{m-1} - V)^2$$

となる.

[定理 5]

(22)
$$\int_{I_{m-1}>W\geq\bar{W}'>0}(\det W)^{\alpha-m}\det(I-W)^{2}\,\tilde{C}_{\kappa}\begin{pmatrix}1&\\&W\end{pmatrix}dW$$
$$=\frac{\tilde{\Gamma}_{m}(\alpha)\tilde{\Gamma}_{m}(m)}{\tilde{\Gamma}_{m}(\alpha+m)}(\alpha m+k)\frac{\Gamma(m)}{\pi^{m-1}}\frac{[\alpha]_{\kappa}}{[\alpha+m]_{\kappa}}\tilde{C}_{\kappa}(I_{m})$$

(23)
$$\int_{1>w_2>\cdots>w_m>0}\Big(\prod_{i=2}^{m}w_i\Big)^{\alpha-m}\prod_{i=2}^{m}(1-w_i)^{2}\prod_{2\leq i<j\leq m}(w_i-w_j)\,C_{\kappa}\begin{pmatrix}1&&&\\&w_2&&\\&&\ddots&\\&&&w_m\end{pmatrix}\prod_{i=2}^{m}dw_i$$
$$=\frac{\tilde{\Gamma}_{m}(\alpha)\tilde{\Gamma}_{m}(m)}{\tilde{\Gamma}_{m}(\alpha+m)}(\alpha m+k)\frac{\tilde{\Gamma}_{m}(m)}{\pi^{m(m-1)}}\frac{[\alpha]_{\kappa}}{[\alpha+m]_{\kappa}}\tilde{C}_{\kappa}(I_{m})$$

§4 Non-central Wishart 分布

複素変数のNon-central Wishart 行列の固有根の同時分布は James [4] で取扱われているが，ここでは別の表現方法を与える。

[定理 6]

$X_{m\times n}\sim CN(M,\Sigma)$ とするとき，$\Sigma^{-\frac{1}{2}}XX'\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ の固有根 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$ の同時密度函数は，

(24)
$$\frac{\pi^{m(m-1)}}{\tilde{\Gamma}_{m}(n)\tilde{\Gamma}_{m}(m)}\mathrm{etr}(-\Sigma^{-1}M\bar{M}')(\det\Lambda)^{n-m}\prod_{1\leq i<j\leq m}(\lambda_i-\lambda_j)^{2}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{\tilde{H}_{\kappa}(\Sigma^{-\frac{1}{2}}M)\tilde{C}_{\kappa}(\Lambda)}{k!\,[n]_{\kappa}\tilde{C}_{\kappa}(I_{m})}.$$

[定理7]

Λ の密度函数を(24)とするとき，Λ の最大根 λ_1 の 密度函数は，

$$(25)\quad \frac{\tilde{\Gamma}_m(m)}{\tilde{\Gamma}_m(n+m)} \operatorname{etr}(-\Sigma^{-1}M\bar{M}')\,\lambda_1^{mn-1} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(mn+k)}{k!}\lambda_1^{k}\sum_{\kappa}\frac{\tilde{H}_\kappa(\Sigma^{-\frac{1}{2}}M)}{[n+m]_\kappa}$$

[定理8]

Λ の密度函数を(24) とする とき，$T = \mathrm{Tr}\,\Lambda$ の密度函数は，

$$(26)\quad \frac{1}{\Gamma(mn)} \operatorname{etr}(-\Sigma^{-1}M\bar{M}')\,T^{mn-1} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(mn)_k}T^{k}\sum_{\kappa}\tilde{H}_\kappa(\Sigma^{-\frac{1}{2}}M)$$

(系6). (26) に於て $M=0$ とすると，

$$(27)\qquad \frac{1}{\Gamma(mn)}\,T^{mn-1}\,e^{-T}$$

となる。

References.

[1] Constantine, A.G. (1966). Ann. Math. Statist 37. 215-225

[2] Goodman, N.R. (1963) Ann. Math. Statist. 34. 152–176

[3] Hayakawa. T. Memorandom No 15. (1868.)

[4] James. A. T. (1964) Ann. Math. Statist. 35 475–501

[5] Khatri. C. G. (1965) Ann. Math. Statist. 36 98–114

[6] Khatri C. G. (1966) Ann. Math. Statist. 37. 468–479